

Einführung in die digitale Signalverarbeitung - Teil 4

Von Spektren, Kurzwellensignalen und Fledermäusen

Dipl.-Ing. Erich H. Franke, DK6II

erich.franke@afusoft.com

Was haben die so genannten Wasserfalldiagramme, die wir von Breitbandempfängern von der Kurzwele her kennen mit den Sonogrammen gemeinsam, die Biologen aus den Rufen von Fledermäusen erstellen? Nun, beide Diagrammarten stellen die Intensität von Signalen und deren Veränderung in einem mehr oder minder breiten Frequenzbereich dar. Die Programme die diese Darstellungen erzeugen benutzen dazu mathematische Verfahren zur Transformation dieser Signale aus dem Zeit- in den Frequenzbereich, die zu Ehren des französischen Mathematikers auch Fourier-Transformationen genannt werden. In diesem Teil der Reihe wollen wir uns anschauen, was so alles dahinter steckt und was man damit anfangen kann.

Königsbach-Stein, im Juli 2012

Retrospektives

Will man den Momentanwert der Intensität eines Signals über der Zeit darstellen, so benutzt man gewöhnlich ein Oszillogramm. Lassen Sie uns zum Aufwärmen das gute alte analoge Kathodenstrahl-Oszilloskop mit einem digitalen Speicheroszillographen vergleichen.

Beim Oszilloskop klassischer Bauart werden auf beiden Achsen *kontinuierliche* Messgrößen aufgetragen. Die X-Achse zeigt dabei die Zeitaufteilung und auf der Y-Achse wird die Spannung oder Leistung aufgetragen. Da die Zeitablenkung durch ein analoges Sägezahnsignal gesteuert wird, so könnte man theoretisch beliebig viele Zwischenwerte sehen. Dies trifft auch auf die Spannungen, die gemeinhin auf der Y-Achse aufgetragen werden, zu. Da die Darstellung auf dem Schirm durch die direkte Ablenkung eines Elektronenstrahls erfolgt, so könnten wir – zumindest theoretisch – beliebig feine Spannungsunterschiede messen.

Wir wollen diese Art der zeit- und amplitudenkontinuierlichen Darstellung als „analog“ bezeichnen.

Im digitalen Speicheroszillogoskop hingegen werden die Spannungswerte des Eingangssignals durch einen Analog-Digitalwandler periodisch in Zahlenwerte umgesetzt. Die Auflösung dieser Wandlung ist mitnichten beliebig fein, sondern hängt davon ab, wie viele unterschiedliche Werte diese Zahlenwerte annehmen können.

Wenn wir beispielsweise ein Signal mit sechzehn Bit digitalisieren, dann kann der aus der Wandlung resultierende Zahlenwert zwischen 0 und 65535 liegen. Bei einer Auflösung von sechzehn Bit sind eben nur 2^{16} Zahlenkombinationen möglich. Besser geht das vom Prinzip her nicht.

Wollen wir – sagen wir einmal – ein Volt auf diese Weise wandeln, dann wären Spannungsänderungen von weniger als ca. $15,26\mu\text{V}$ einfach nicht mehr zu unterscheiden, denn die kleinste Spannungs-

stufe beträgt in diesem Fall $\Delta U = U_0 \cdot \frac{1}{2^{16}}$. Diese kleinste Spannungsauflösung bestimmt die so genannte maximale Dynamik. Diese entspricht dem Verhältnis von $\Delta U/U_0$, die wir gewöhnlich in Dezibel angeben, um besser vergleichen zu können.

Verallgemeinert errechnet sich der theoretische Grenzwert der durch einen *linearen* A/D-Wandler mit einer Auflösung von n Bit erzielbare Dynamik zu $\frac{A}{dB} = 20 \cdot \log(2^n) = n \cdot 20 \cdot \log(2) \approx n \cdot 6$.

Aus dieser Beziehung folgert die ingenieurmäßige Faustregel von abgerundeten „sechs dB pro Bit“ mit der wir einfach arbeiten können.

In unserem Beispiel mit 16 Bit hätte die Dynamik somit ein Limit von 96dB, wobei dieser Wert in der Praxis auf Grund schaltungstechnischer Einschränkungen unter diesem theoretischen Wert liegen wird.

Eine ähnliche Überlegung gilt für die Zeitauflösung.

Beim analogen Oszilloskop war diese noch wirklich kontinuierlich, denn die Zeitablenkung wird dort klassisch mit Hilfe eines Sägezahngenerators durchgeführt.

Der A/D-Wandler des digitalen Speicher-Oszilloskops hingegen wandelt die Amplitude des Eingangssignals immer zu *diskreten* Zeitpunkten¹ in Zahlenwerte um und zwar mit einer Frequenz, die wir als Abtastrate (eng. *sampling rate*, f_s) bezeichnen.

Das bedeutet aber auch, dass unser Speicher-Oszilloskop dramatische Signaländerungen, die zwischen diesen Abtastpunkten auftreten, einfach nicht mitbekommen kann.

Gemäß dem nach Shannon und Nyquist benannten Abtasttheorem müssen wir ein Eingangssignal sogar mit der doppelten Frequenz des höchsten Frequenzanteils abtasten, welcher in dem Signal enthalten ist. Um dies sicherzustellen wird gewöhnlich vor der eigentlichen Wandlung ein Tiefpass als „Anti-Aliasing-Filter“ eingesetzt, der die höheren Frequenzanteile begrenzt.

Wir können uns für weitere Überlegungen das Oszilloskop durch einen digitalen Empfänger oder ein Signalaufzeichnungsgerät ersetzt denken.

Die Überlegungen und auch die Einschränkungen bleiben dabei die gleichen.

Unsere digitalen Geräte zeichnen Messwerte mit fester Abstufung auf und zwar periodisch zu festen Zeitpunkten.

Die Bit-Auflösung des A/D-Wandlers und die Abtastrate begrenzen die „Güte“ der Digitalisierung. Doch was immer wir auch tun, wirklich analog wird es nicht werden!

Diesen Gedanken dürfen wir bei den folgenden Überlegungen nicht aus den Augen verlieren.

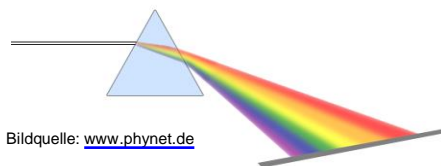
Zeitbereich vs. Frequenzbereich

Was hat ein Oszilloskop und ein Glasprisma gemeinsam und was unterscheidet es?

Da Licht schließlich ebenfalls Teil des elektromagnetischen Spektrums ist, so ist dieser Vergleich zulässig, wenn wir für einen Moment die Frequenzen außer Acht lassen.

Ein Oszilloskop trägt die Intensität eines Signals über der *Zeit*-Achse auf.

Es zeigt uns in gewisser Weise einen *zeitlichen* Ausschnitt der Momentanwerte eines Signals und wie diese sich über die Zeit verändern.



Bildquelle: www.phynet.de

Abb. 1: Farbzerlegung mittels Glasprisma

Unser Glasprisma hingegen „sortiert“ einzelne Frequenzen aus einem Gemisch aus verschiedenen Lichtfrequenzen (Wellenlängen) und stellt diese *gleichzeitig* nebeneinander dar.

Zerlegt man weißes Licht welches ja solch ein Gemisch unterschiedlicher Frequenzen darstellt (Abb. 1), so zeigt uns das *Spektrum* die Intensitätsverteilung über die darin enthaltenen Frequenzen bzw. Wellenlängen an.

Was wir mit dem Auge sehen sind die Intensitätswerte über einen Wellenlängenbereich, also über ein ganzes Frequenzband und zwar für jeden Punkt zum exakt gleichen Zeitpunkt.

Solch eine Einrichtung für Funksignale zu haben würde uns sicher gefallen, wenn wir an einen Überwachungsempfänger zur Aufklärung von frequenzagilen Systemen denken, zum Beispiel an ein Frequenzsprungsystem (engl. *frequency hopper*).

Um ein ganzes Frequenzband zu überwachen benutzte man ganz früher „Scanner-Empfänger“. Diese bestanden aus einem schmalbandigen Empfangsteil, dessen VFO immer wieder das Frequenzband überstrich.

Doch wurde in Wahrheit zu einem bestimmten Zeitpunkt immer nur eine einzige Frequenz angeschaut.

Dies bedeutet aber, dass sich kurze Signalausendungen von frequenzagilen Systemen wie Frequenzspringer („Frequency Hopper“) oder Chirp Sounder mit solch einem System nur ungenügend aufzeichnen lassen, da der „Sweep“ diese zum Suchvorgang asynchronen Signale ziemlich sicher verpassen wird.

Unser Prisma hingegen zeigt uns alle Frequenzen wirklich parallel und gleichzeitig an.

¹ Vom lateinischen Wort *discretus*, in der Bedeutung von „unterschieden oder abgesondert“

So etwas auch für die Signalauswertung zu besitzen wäre sicherlich wünschenswert.

In der Tat gibt es Rechenvorschriften, die Analogwerte in eine Art kontinuierlicher spektraler Darstellung überführen können. Diese basieren auf der so genannten Fourier-Transformation.

Spektren, kontinuierlich oder diskret verpackt

Im ersten Teil dieser Vortragsreihe kam ich bereits auf den französischen Physiker und Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier² zu sprechen, der erstmalig beschrieb, wie man periodische Kurvenformen von Signalen durch Summation von Sinus- und Cosinus-Funktionen nachbilden kann.

Fourier hat in seinen Arbeiten mathematische Verfahren beschrieben, die es erlauben Funktionen auf Basis des Parameters Zeit (t) in den „Frequenzbereich“ zu transformieren, um die Intensitätsverteilung über alle Frequenzen (ω , f) darzustellen.



Abb. 2: kontinuierliches Spektrum

Erzeugen wir das Spektrum weißen Lichts mit unserem guten alten Glasprisma, so erkennt unser menschliches Auge keine Grenzen zwischen den einzelnen Farben.

Die Farben, bzw. die Lichtfrequenzen sortieren sich nach aufsteigender Frequenz und sie scheinen für unser Auge

ineinander zu „verschwimmen“.

Das Prisma erzeugt also ein „kontinuierliches“ optisches Spektrum (Abb. 2). Die Zahlen im Bild stellen die Wellenlängen in Nanometer dar.

Fourier betrachtete bei seinen Überlegungen ebenfalls rein mathematische Funktionen, die ohne Stufen sozusagen „kontinuierlich“ definiert sind.

Damit wir mit seinen Rechenvorschriften in der digitalen Signalverarbeitung also etwas anfangen können, müssen wir sie zuvor erst einmal umbauen, damit sie auch mit Signalen klar kommen, die zu „diskreten Zeitpunkten“ abgetastet worden sind.

Beginnen wir aber erst einmal mit Fouriers reiner Lehre.

Allgemein schreibt man die Transformation wie $X(j\omega) \leftrightarrow x(t)$.

Sie folgt dem Bildungsgesetz
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Der mathematische Ausdruck sieht in der Tat sehr gewöhnungsbedürftig aus und wenn Sie im Grunde Ihres Herzens kein wirkliches Vergnügen beim Anblick dieser Formelzeichen haben, so kann ich Ihnen das nicht verdenken.

Lassen Sie uns also erst einmal ein paar Vereinfachungen machen.

Zunächst ignorieren Sie bitte die „imaginäre Zahl“ j .

Es gibt einen Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und der e-Funktion mit einem imaginären Exponenten der zwar wichtig und sicher auch interessant ist, jedoch hier zu mehr Verwirrung als zur Klarheit führt.

Falls Sie Näheres dazu lesen wollen, so schlagen Sie getrost in mathematischen Standardwerken unter dem Begriff „Eulersche Formel“ nach.

Nun wollen wir uns die Mühe machen und etwas genauer hinschauen.

Die Formel liest sich in Klartext übersetzt nämlich ungefähr wie folgt:

Wir erzeugen einen Wert für die Intensität X für eine bestimmte Frequenz $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, indem wir das Integral des Produkts der Funktion $x(t)$ mit dem Wert der e-Funktion gemäß $x(t) \cdot e^{-j\omega t}$ bilden, und zwar für wirklich alle, beliebig feine Zeitpunkte t , und zwar vom Anbeginn aller Zeiten beim Zeitpunkt $-\infty$ bis in alle Ewigkeit bei $+\infty$. Der Funktionsparameter ist ω .

Solch eine Darstellung ist aber für einen Programmierer überhaupt nicht griffig.

² Jean Baptiste Joseph Fourier, 21.3.1768 bis 16.5.1830; Mathematiker und Physiker; beschrieb u. a. bereits 1822 den Treibhauseffekt

Da ist zum Ersten die kontinuierliche Funktion $x(t)$. So etwas haben wir in der Praxis der Signalverarbeitung überhaupt nicht!

Wir setzen vielmehr auf Messwerten auf, die unser real existierender Analog-Digital-Wandler zu festen Zeiten mit der Abtastrate geliefert und in einem Zwischenspeicher, einem „Array“ als aufeinanderfolgende („diskrete“) Zahlenwerte abgespeichert hat.

An Stelle der theoretisch-kontinuierlichen Funktion $x(t)$ können wir die Messwerte nur aus dem Array $x[n]$ an festen Punkten auslesen.

Wir kennen solch eine Vorgehensweise bereits vom ersten Teil dieses Beitrags, als wir Sinussignale per Software erzeugt haben.

Auch dort haben wir nur „diskrete“ Stützstellen der Sinuskurve erhalten.

Und wir haben den Nebeneffekt kennengelernt, dass sich dadurch in das Signal Fehler einschleichen, die wir anschaulich „Abtastfehler“ nennen.

Hier ist es nun genau so: Der A/D-Wandler liefert die Messwerte wie ein Uhrwerk in der Frequenz der Abtastrate. Was sich zwischen den Abtastwerten abspielt können wir nicht erahnen. Wir müssen uns darauf verlassen, dass sich das Signal zwischen zwei Abtastintervallen freundlich verhält und keine wilden Sprünge macht.

Doch letztendlich haben wir damit einen wichtigen Schritt von der Theorie in die Wirklichkeit gemacht, denn wenn wir das Array auslesen, dann wird aus dem kontinuierlichen Parameter ‚Zeit‘ t ein Feldindex n , der die Messwerte in dem Array adressiert.

Im Prinzip erhöht er sich zu jedem Abtastzeitpunkt um eins, bis er den Endwert N erreicht, der mit der Abtastrate verknüpft ist.

Haben wir beispielsweise eine Abtastrate von 8000 Abtastungen/Sekunde gewählt, dann erreicht uns alle $125\mu\text{s}$ ein neuer Messwert.

Würden wir die Abtastwerte in einem Array mit $N=1000$ Speicherplätzen ablegen, so würde ein Signalausschnitt von $\frac{N}{f_s} = 125$ Millisekunden dort genau hinein passen.

N wird deshalb anschaulich auch als „Fensterbreite“ oder FFT-Länge bezeichnet, denn diese Anzahl an Abtastwerten wird in der Funktion in einem Arbeitsschritt verarbeitet.

Da wir nun nicht mehr mit der beliebig fein aufgelösten „theoretisch-kontinuierlichen“ Zeit (t) arbeiten und auch nicht mehr von einem „theoretisch-kontinuierlichen“ Spektrum mit unendlich vielen Frequenzlinien³ (f) ausgehen können, müssen wir auch den Exponenten der e-Funktion umschreiben.

An Stelle des Terms $(-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t)$ wird die Abhängigkeit vom Array-Index n und der diskreten Frequenzkoeffizient k eingeführt werden.

Der Exponent schreibt sich danach wie folgt: $\left(-j \cdot 2\pi \cdot k \cdot \frac{n}{N}\right)$

Nun wollen wir das Integralzeichen \int knacken.

Aus der Schule wissen wir, dass dieses für eine Art extrem feiner Summation steht.

Da wir aber nun die theoretische, geschlossene, „kontinuierliche“ Funktion $x(t)$ für beliebige t durch das praktische Array mit samt seinen „diskreten“ Indices ersetzt haben, dürfen wir das Integralzeichen, in einem Schritt bewusster Vereinfachung durch das Summenzeichen Σ ersetzen.

Selbstverständlich machen wir durch diese Vergrößerung einen Fehler. Wir kennen das bereits aus den beiden letzten Vorträgen.

Sie erinnern sich: Eine periodische Rechteckfunktion lässt sich durch Summierung aller Glieder der Reihe $f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$ annähern.

³ Die Frequenz f versteckt sich in der Kreisfrequenz $\omega=2\pi f$

Die Annäherung, die „Approximation“ wird umso besser, je mehr Einzelglieder wir in die Summation aufnehmen. In diesem Fall verschwinden die Überschwinger und die Summenkurve wird mehr und mehr rechteckförmig (Abb. 3).

Richtig gut wird es allerdings erst, wenn wir *unendlich* viele Summanden betrachten, doch das ist ja nur theoretisch möglich.

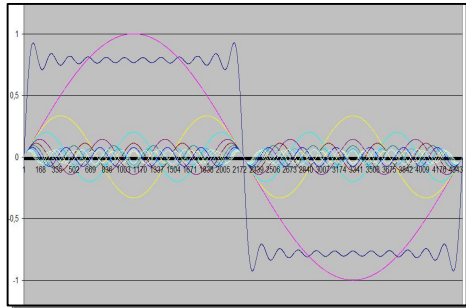


Abb. 3: Ergebnis der Überlagerung

Für die Transformation stellen wir eine ähnliche Überlegung an.

Ursprünglich forderte Herr Fourier, dass die Integration der Einzelprodukte für *alle* Zeitpunkte erfolgen muss, also vom Anbeginn aller Zeiten bis in alle Ewigkeit, vom Zeitpunkt $(-\infty)$ bis $(+\infty)$.

Das ist eine im praktischen Alltag der digitalen Signalverarbeitung nicht erfüllbare Forderung!

Was sollen wir also tun?

Betrachten wir noch einmal den Exponenten in $\left(-j \cdot 2\pi \cdot k \cdot \frac{n}{N}\right)$, dann sehen wir, dass das, was früher einmal der Parameter Zeit t war, nun zu dem Quotienten $\left(\frac{n}{N}\right)$ mutiert ist.

n läuft dabei sinnvoller Weise von 0 bis $N-1$. Danach beginnt das Spiel periodisch von Neuem.

Falls wir also annehmen, dass der signifikante Anteil des periodischen Signals in das Intervall $\{0..N-1\}$ hineinpasst, dann genügt es in der Tat, nur diesen Bereich zu betrachten.

Damit hätten wir alle mathematisch-theoretischen Klippen umschiffen und kommen zu der weitaus besser zu handhabenden Beziehung $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$

Diese neue Formel sieht zwar immer noch übel genug aus, liest sich in Klartext übersetzt jedoch weit aus implementierbarer:

Wir erzeugen einen Wert für die Intensität X für eine bestimmte diskrete Frequenzlinie k indem wir alle gespeicherten Amplituden der Abtastwerte im Bereich

$n=\{0..N-1\}$ mit dem Wert der e-Funktion gemäß $x[n] \cdot e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$ multiplizieren und diese Zwischenwerte aufsummieren. k ist der Funktionsparameter!

Diese modifizierte Rechenvorschrift wird als „diskrete Fourier-Transformation“ (DFT) bezeichnet, denn sie ist darauf ausgerichtet mit unseren abgetasteten Signalen klar zu kommen, die „stufig“, d.h. „amplituden-diskret“ sind und nur an festen Zeitpunkten aufgenommen wurden, also auch „zeit-diskret“ sind.

Die DFT verarbeitet auch nicht einzelne Abtastwerte, sondern immer ganze „Blöcke“ von hintereinander erfassten Samples, die wir im „Vektor“ $x[n]$ zwischenspeichern.

Der Programmierer würde diese Vektoren als *Felder* oder *Arrays* implementieren.

Die DFT erzeugt in jedem Rechenschritt für jedes k einen *diskreten* Ergebniswert, der die Intensität des Signals am Speicherort k repräsentiert.

Die DFT erzeugt also ein neues Array, das die Intensitäten zu einzelnen Frequenzlinien enthält.

Wenn man so will, so sortiert die DFT die Intensitäten der Einzelfrequenzen eines Frequenzgemischs in klar definierte „Schubladen“.

Dieses Verhalten erfreut den Programmierer, denn damit erhält er ohne weitere Anstrengung alle Daten in einem Array mundgerecht serviert.

Die diskreten „Schubladen“ werden in der Literatur gerne anschaulich mit dem englischen Wort „bin“ (Schüssel, Eimer) bezeichnet.

Eine Kleinigkeit gibt es noch zu beachten.

Das, was wir als Abtastwerte bezeichnen sind in Wahrheit *komplexe Zahlen*, also ein Wertepaar.

Wir haben die komplexen Zahlen bereits kennengelernt, als wir die Phasenmodulation bei der Betriebsart PSK31 besprochen haben.

Komplexe Zahlen besitzen zwei Komponenten, den „Realteil“ I (eng. „In-Phase“) und den „Imaginärteil“ Q (engl. „Quadrature“) und lässt sich demnach wie folgt darstellen: $X = I + jQ$

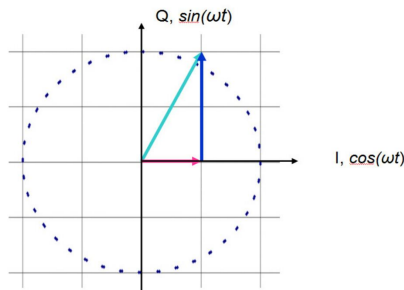


Abb. 4: Komplexe Ebene

Wir können sie uns als Koordinaten des Endpunkts eines Vektors in der komplexen Ebene vorstellen (Abb. 4).

Wenn das für Sie verwirrend klingt, dann denken Sie einfach an Koordinaten auf einer topographischen Landkarte.

Jeder einzelne Punkt besitzt eine geographische Länge, die waagrecht aufgetragen wird.

Die geographischen Breiten liegen senkrecht („quer“) dazu mehr oder minder parallel zum linken und rechten Kartenrand.

Um aber den Abstand zweier beliebiger Punkte zu bestimmen, die den horizontalen Abstand ΔI und den vertikalen Abstand ΔQ besitzen müssen Sie den guten alten Pythagoras befragen und den bekannten Ausdruck $\Delta X = \sqrt{\Delta I^2 + \Delta Q^2}$ bilden. Genau so bildet man den „Betrag“ der Differenz zweier komplexer Zahlen.

Die Eigenschaft der DFT *komplexe Zahlen* als Eingangswerte zu akzeptieren macht sie ideal für die Verarbeitung von I/Q-Signalströmen moderner Übertragungssysteme.

Wie wir im letzten Vortrag gesehen haben, liefern moderne Demodulatoren immer gleich *zwei* Datenströme. $Q(t)$, das durch Multiplikation mit dem Kosinus entstanden ist und $I(t)$, welches aus dem Sinusanteil kommt. Wir sagen dazu, die Daten in den Datenströmen stünden orthogonal, also senkrecht zueinander.

Unsere DFT verarbeitet diese beiden Datenströme als Komponenten eines einzigen komplexen Datenstroms auf elegante Weise parallel. Wir wollen diese Eigenschaft jedoch momentan nicht vertiefen.

Also in Kurzform: Komplexe Zahlen bestehen aus *zwei* numerischen Komponenten. Mehr Kopfzerbrechen müssen wir uns momentan nicht darüber machen.

Wir müssen später nur daran denken, in die Rechenvorschrift der DFT genügend viele Werte einzuspeisen.

Kenngrößen der DFT

Das von der DFT erzeugte Spektrum bezieht sich auf die Abtastfrequenz, mit der die Messwerte, also die Amplituden im Zeitbereich vom Analog-Digital-Wandler angeliefert werden.

Diese Abtastfrequenz könnte bei einer Sound-Karte also beispielsweise 11025 s^{-1} betragen. In diesem Fall käme also ca. alle $90,7 \mu\text{s}$ ein neuer Abtastwert in das System.

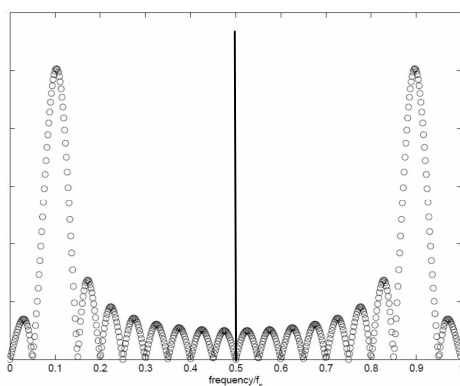


Abb. 5: „diskretes“ Spektrum

Da unser Bild auf diese Abtastfrequenz f_s normiert ist, müsste man den am weitest rechts liegenden *bin* also mit 11025 s^{-1} beschriften. Die Mitte läge demnach bei 5512 s^{-1} .

Würden wir eine Länge N des Ein- und Ausgabevektors von 256 annehmen, so hätte der Ergebnisvektor ebenfalls 256 Bins, von der jeder eine Breite von ca. 43 Hertz hätte.

$$\text{Allgemein berechnet sich dies so: } \Delta f_B = \frac{f_s}{N}$$

Eine interessante Eigenschaft zeigt sich wenn wir das diskrete Spektrum das sich aus der Verarbeitung der DFT ergibt in Abb. 5 näher betrachten.

Die ausgegebenen Spektralwerte sind nämlich zur „Mitte“ des Frequenzbereiches symmetrisch.

Diese Frequenz, die wir die Nyquist-Frequenz nennen, beträgt immer die halbe Abtastrate.

Nun wissen wir endlich, warum wir bei der Digitalisierung eines Signals die Abtastfrequenz immer doppelt so hoch wählen müssen wie die höchste Signalfrequenz.

Oberhalb der Nyquist-Frequenz „faltet“ sich das Spektrum nämlich wieder nach unten und dadurch würden sich Spektralanteile unzulässig vermischen und das Rechenergebnis verfälschen.

Leute aus der Signalverarbeitung nennen diesen Effekt auch „Aliasing“.

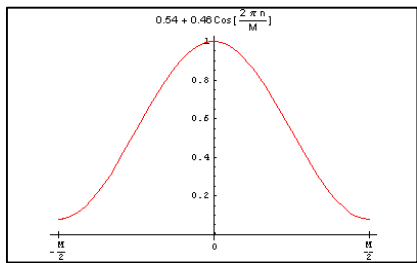
Ein Blick in das Fenster

Wir müssen nun noch eine Kleinigkeit korrigieren:

Die FFT berechnet das Spektrum lediglich aus einem Ausschnitt des Gesamtsignals, im Beispiel oben aus 1024 Abtastwerten. Bei 11025 Abtastwerten pro Sekunde sind das gerade einmal knapp 93 Millisekunden.

Das tatsächliche Spektrum bildet sich – zumindest mathematisch – jedoch aus einem *unendlich* ausgedehnten Signal.

Weiter oben haben wir angenommen, dass „alle signifikanten Signalanteile“ innerhalb der N Abtastwerte zum Liegen kommen.



Quelle: Wikipedia, STUDI111

Abb. 6: Beispiel für ein Hamming-Fenster

Uns hilft zwar die Periodizität der Fourier-Transformation. Wenn alle Anteile bereits in N Abtastwerten liegen, dann befindet sich auch in $2N$ Abtastwerten kein Mehrwert an Information.

Also müssen wir dafür sorgen, dass das Signal für die FFT so aussieht, als würde es sich außerhalb des Fensters genau so fortsetzen wie innerhalb.

In der Signalverarbeitung nennen wir das Verfahren, dies sicherzustellen die „Fensterung“.

In der Praxis multiplizieren wir die Abtastwerte mit den Werten, die uns die „Fensterfunktion“ liefert.

Das einfachste Fenster wäre ein „Rechteck“, welches genau die N Abtastwerte innerhalb des Fensters umfasst und rechts und links alles abschneidet. Anteile des Signals vor dem Beginn dieses „Sehschlitzes“ entfallen also komplett.

Dies ist die schlechteste denkbare Fensterung. Mit der Überlegung, dass Ecken im Signalfloss Neben- und Oberwellen geben, kann man leicht nachvollziehen, dass solch ein Ansatz das Spektrum stark verfälscht.

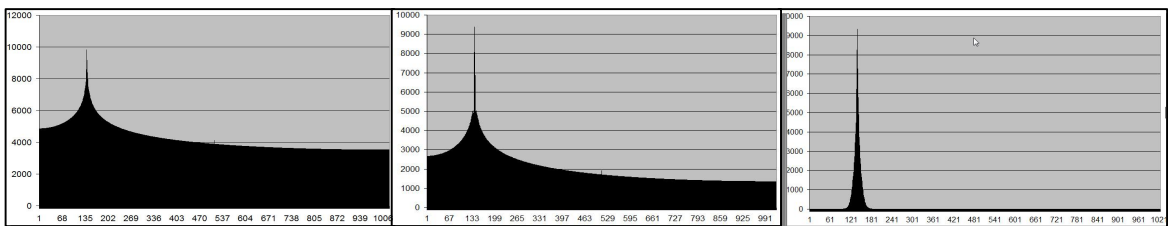


Abb. 7: Einfluss der Fensterfunktion auf das Spektrum: Rechteck, Hamming, von-Hann

In der Tat hängt die Qualität stark von der Wahl der geeigneten Fensterfunktion ab (Abb. 7). Unser Beispiel bildet das Spektrum eines mit 11025 Samples/Sekunde abgetasteten Sinussignals mit einer Frequenz von 3 kHz, das mit einer DFT mit einer Fensterbreite von 1024 berechnet wurde.

Wir kennen das klassische Hamming-Fenster (Abb. 6), das von-Hann-Fenster („Hanning“), das Kaiser-Fenster, welches auf Bessel-Reihen aufsetzt und weitere mehr oder weniger komplexe Bewertungsfunktionen.

Das Kriterium zur Auswahl ist Komplexität, Rechenaufwand und notwendiger Störabstand.

Ein guter Artikel hierzu findet sich in [WNDW].

Fast is beautiful! Die FFT

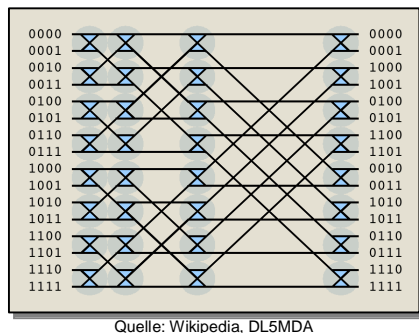
In der programmieretechnischen Praxis wird sehr häufig eine elegante Unterart der DFT benutzt, die sich auf Digitalrechnern weit schneller ausführen lässt als das Original.

Diese wird als „Fast Fourier-Transformation“ (FFT) bezeichnet. Man sagt zwar, dass die FFT erstmalig 1965 durch James Cooley und John W. Tukey beschrieben worden sei.

Doch forscht man ein wenig nach, dann findet man Quellen, nach denen Carl Friedrich Gauß bereits 1805 die Grundlagen dazu gelegt haben soll.

Im Gegensatz zur mehr allgemeinen DFT, die eine beliebige Anzahl diskreter Eingangswerte verrechnen kann, verarbeitet die FFT als Spezialisierung und gleichzeitig Vereinfachung Blöcke, deren Längen immer Zweierpotenzen darstellen, also Längen für die die Beziehung $N=2^n$ gilt.

Als typische Block-Längen kommen also Zahlen wie beispielsweise 256, 512 oder 1024 in Frage.



Quelle: Wikipedia, DL5MDA

Abb. 8: Butterfly-Algorithmus (FFT)

Der „Butterfly“-Graph (Abb. 8) illustriert das prinzipielle Vorgehen, wobei die programmtechnische Umsetzung wieder erstaunlich simpel zu bewerkstelligen ist, sofern der Rechner schnelle Fließkomma-Multiplikationen durchführen kann.

Es gibt eine Reihe abgewandelter Algorithmen, welche die zur Transformation notwendigen Fließkomma-Multiplikationen verringern, damit das Verfahren schneller auch auf kleinen Mikroprozessoren gerechnet werden kann.

Normale PC können FFT im Audio-Bereich in Echtzeit problemlos durchzuführen.

Benötigt man nicht solch eine feine Aufteilung so empfiehlt es sich, die Abtastrate zu reduzieren. Alternativ kann man aber auch die Abtastwerte „dezimieren“.

Man lässt dabei in regelmäßigen Abständen einfach Abtastwerte weg. Da dies jedoch ein „stufigeres“ Ergebnis zur Folge hätte, lässt man die dezimierten Werte einfach ein digitales Tiefpassfilter geeigneter Grenzfrequenz, das „Dezimationsfilter“ durchlaufen und stellt so die Nyquist-Bedingung wieder her, um das bereits weiter oben beschriebene „Aliasing“ zu verhindern.

Beispielhaftes

Technisch interessierte Kinogänger kennen „Wasserfall-Diagramme“ (Abb. 9) aus moderneren U-Boot-Filmen, wie beispielsweise der sehenswerten Verfilmung des Romans von Tom Clancy „Jagd auf Roter Oktober“ [JAGD].

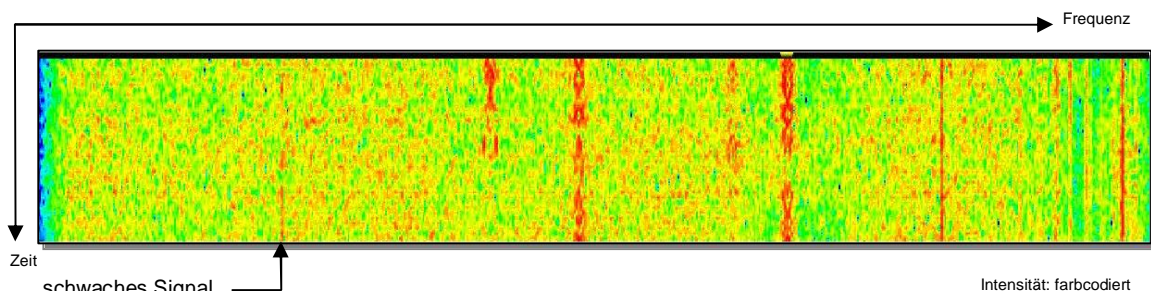


Abb. 9: Beispiel für ein Wasserfall-Diagramm [PSK31]

In der Tat bilden Passiv-Sonar-Systeme in Echtzeit Spektren akustischer Signale, um auch extrem schwache aber regelmäßige Muster erkennen zu können.

In der Wasserfall-Darstellung wird immer wieder das breitbandige Spektrum über einen Frequenzbereich gebildet, wobei die Intensitäten farbcodiert werden.

Aufeinanderfolgende Spektren schreibt man dabei untereinander.

Durch „optische Korrelation“ kann man so selbst schwache Signale aus dem Rauschen heraus erkennen. Moderne Funkaufklärungssysteme machen dies ebenfalls.

Auch viele neu auf den Markt drängenden Funkgeräte und –modems besitzen diese Fähigkeit der Breitband-Darstellung, wobei die dazu notwendige Rechenleistung von einem modernen PC quasi „mit links“ bereitgestellt wird.

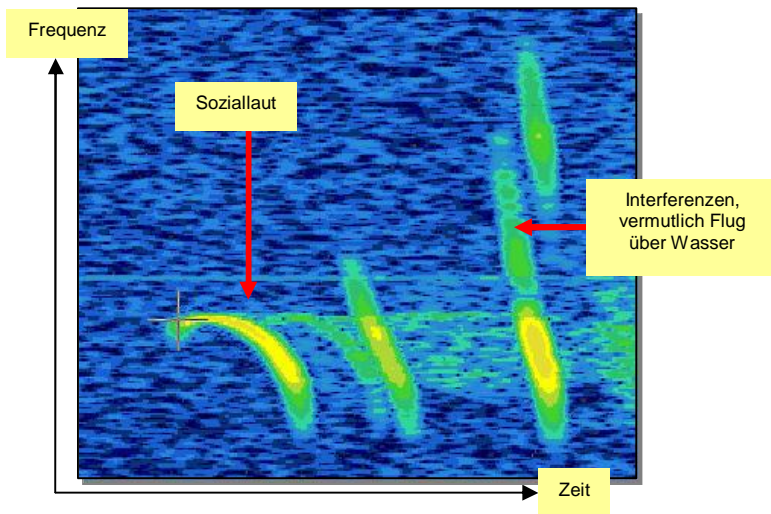


Abb. 10: Beispiel für ein Sonogramm [Wasser-Fledermäuse]

Dadurch, dass wir in dieser Art der Darstellung Veränderungen des Signals in Zeit, Frequenz und Intensität darstellen können, finden sich Anwendungen auch in anderen wissenschaftlichen Bereichen.

Als wir 2010 Arbeiten für den Wettbewerb ESNC der ESA durchführten, hatten wir uns mit der Auswertung von Lautauswendungen von Fledermäusen beschäftigt.

Auch hier kommt der Berechnung von Echtzeit-Spektren der erfassten Ultraschall-Signale eine große Bedeutung zu.

Sonogramme werden hierzu eher klassisch aufgebaut.

Die Frequenz wird in der Ordinate aufgetragen, der Zeitablauf parallel zur X-Achse. Aus den Diagrammen kann man quasi die Fingerabdrücke der Tiere bestimmen.

Viele Fledermausarten benutzen Frequenzmodulation. An Hand der Eckfrequenzen, der Form und der Dauer des „Sweep“ kann man recht zuverlässig die Art bestimmen und auch Soziallaute, Ortungslaute und so weiter unterscheiden (Abb. 10).

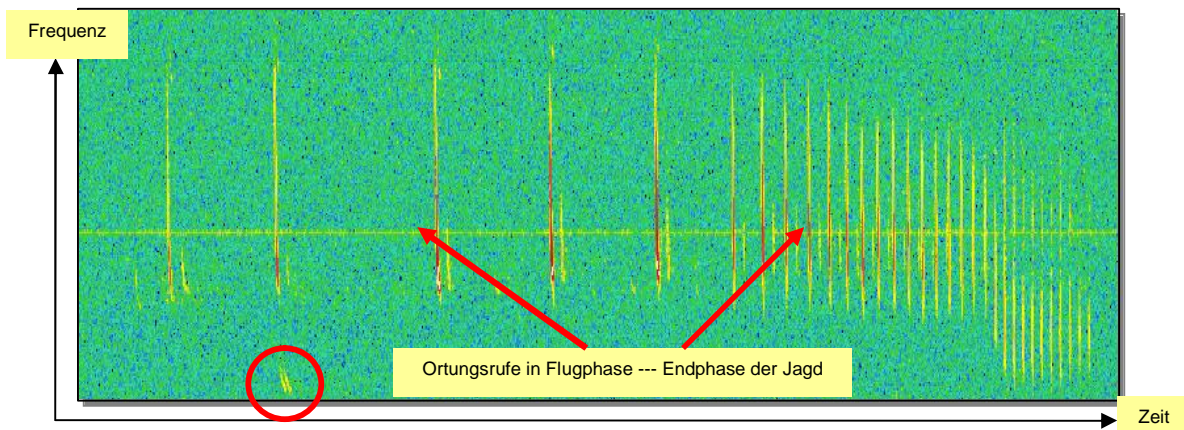


Abb. 11: Beispiel für ein Sonogramm [Wasser-Fledermaus auf Jagd]

Intensität: farbcodiert

Abb. 11 zeigt beispielsweise die letzten Millisekunden im Leben eines Insekts, das von einer Wasserfledermaus gerade aufs Korn genommen wurde.

Für uns Nachrichtentechniker interessant ist, wie virtuos die Tiere dabei mit ihrer Fähigkeit umgehen, in völliger Finsternis zu jagen.

Zeigt der linke Teil des Bildes noch die Ortungsrufe, mit der sich die Wasserfledermaus im Gelände orientiert, so hat sie etwa in Bildmitte etwas Jagenswertes gehört und „schaltet nun auf das Ziel auf“, wie Spezialisten für Flugabwehrsysteme dies wohl bezeichnen würden.

Die Rate der Rufe steigt rapide an, gleichzeitig modifiziert das Tier die Eckfrequenzen und führt damit so etwas wie eine Dopplerkorrektur für den Endanflug durch.

Und noch etwas Interessantes ist in dem Bild zu sehen. Die links eingekreisten Signale sind nicht etwa Störungen oder Artefakte. An Hand der Ruffrequenzen und ihrer Dauer kann man klassifizieren, von wem diese stammen.

Die niedere Frequenz von ca. 20 Kilohertz und die Rufdauer von ungefähr 10 Millisekunden lassen darauf schließen, dass hier noch ein Großer Abendsegler über dem Habitat kreist.

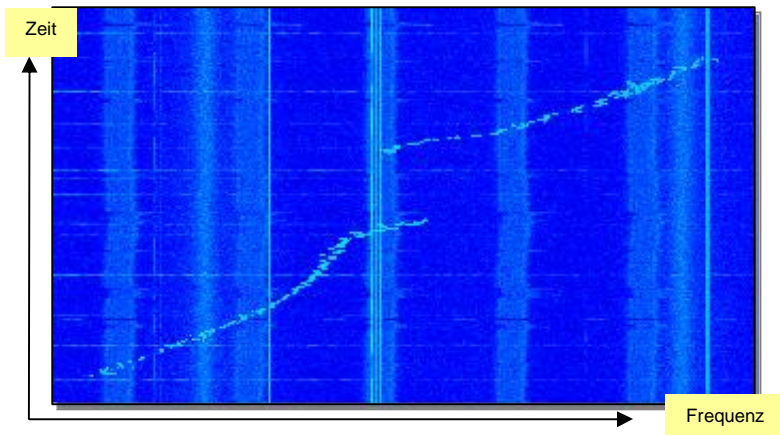


Abb. 12: Frequenzagiles System in Wasserfall-Darstellung

Im Bereich der Funkaufklärung kann man mit der Spektraldarstellung Betriebsarten klassifizieren und in ihren Parametern vermessen.

Selbst Frequenzsprungsysteme, Chirp-Sounder und andere frequenzagile Systeme, die man mit Schmalbandempfängern nicht aufklären könnte, lassen sich auf diese Weise darstellen und vermessen.

Abb. 12 zeigt das Wasserfall-Diagramm eines frequenzagilen Systems.

einmal ein zufälliges „Ping“ gehört, wenn das Signal die Filterbandbreite des Empfängers durchläuft.

In der Darstellung des Spektrums in Echtzeit fällt eine derartige Aussendung jedoch sofort auf.

In einem schmalbandigen Empfänger hätte man davon höchstens

Ausblick

Die Fourier-Transformation ist eine der grundlegenden Techniken und für die Anwendung in der digitalen Signalverarbeitung essentiell.

Wir werden im nächsten Teil dieser Reihe einige praktische Anwendungen hierzu selbst programmieren und dabei sehen, dass die Anwendung der heute diskutierten Theorie weitaus einfacher ist, als dies vielleicht den Anschein hat.

Bleiben Sie also gespannt auf den nächsten Beitrag.

Abkürzungen und Begriffe

ADC	Analog Digital Converter; Analog Digital Wandler
CW	Continuous Wave. Aussendung eines konstanten Trägersignals.
DAC	Digital Analog Converter.
DFT	Discrete Fourier Transform; Fourier-Transformation von nicht-kontinuierlichen bzw. (zeit-) diskreten Signalen mit beliebigen Blocklängen. Die DFT erzeugt dabei <u>diskrete</u> Spektren im Frequenzbereich. Das ist das Mittel der Wahl.
DTFT	Discrete Time Fourier Transform; Wandelt ebenso wie die DFT Blöcke nicht-kontinuierlicher, also zeitdiskreter Signale in den Frequenzbereich um. Das Ergebnis ist jedoch <u>frequenz-kontinuierlich</u> und daher für uns in diesem Fall nicht brauchbar.
EloKa	Elektronische Kampfführung
FFT	Fast Fourier Transform; Schnelle Fourier-Transformation. Wie DFT, nur basierend auf Blöcken mit Längen aus Zweierpotenzen
FSK	Frequency Shift Keying
PSK	Phase Shift Keying
SR	Sampling Rate; Abtaste (eines ADC); Gibt die Anzahl der Konvertierungen pro Sekunde an.
VFO	Variable Frequency Oscillator. An diesem stellt man die Betriebsfrequenz ein.

Quellen

[ESNC]	http://conference.galileo-masters.eu/presentations/october19th/earth_observatation/baden_wuerttemberg.pdf
[JAGD]	„Jagd auf Roter Oktober“, 1990, R: John McTierman, D: Sean Connery, Alec Baldwin
[KAPF]	Ingrid Kapf, Flederhaus; AGF Baden-Württemberg e.V.
[PSK31]	http://flaschenpost.piratenpartei.de/wp-content/uploads/2011/02/psk31.jpg
[WNDW]	http://de.wikipedia.org/wiki/Fensterfunktion